

ESPACIOS VECTORIALES. (hoja 1 curso 07/08)

1. Sea V un espacio vectorial y W un subconjunto de V . Decide en cada caso si W es un subespacio vectorial de V .

1. $V = \mathbb{R}^3$; $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / 5x_1 - x_3^2 = 0; x_1 + x_2 = 0\}$
2. $V = \mathbb{R}^4$; $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + 7x_3 = 0; x_1 + x_3 - x_4 = 0\}$
3. $V = \mathbb{P}_2$; $W = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{P}_2 / a_0 - a_1 + a_2 = 4\}$
4. $V = \mathbb{M}_2$; $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2 / a + 2b = 0; c + d = 0 \right\}$

2. ¿Cuáles de los siguientes sistemas de vectores son libres?. Si S es ligado obtén un sistema libre y equivalente a S .

1. $V = \mathbb{R}^3$; $S = \{(0, 0, 1), (1, 1, 0), (3, 3, -2)\}$.
2. $V = \mathbb{M}_2$; $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$;
3. $V = \mathbb{P}_2$; $S = \{1 + 2x - x^2, 3x, 2x - 2x^2, 1 - x\}$.
4. $V = \mathbb{R}^4$; $S = \{(1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, -1), (1, 3, -2, 0)\}$.

3. Hallar las ecuaciones del subespacio vectorial generado por el sistema de vectores S .

1. $V = \mathbb{R}^2$; $S = \{(3, 1)\}$
2. $V = \mathbb{R}^4$; $S = \{(1, 0, 0, 2)\}$
3. $V = \mathbb{M}_2$; $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
4. $V = \mathbb{P}_2$; $S = \{1 + x, x^2 + x\}$

4. ¿Son equivalentes los sistemas de vectores S y S' en cada caso?.

1. $V = \mathbb{R}^3$; $S = \{(0, 1, 1)\}$; $S' = \{(1, 1, 0)\}$
2. $V = \mathbb{M}_2$; $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$; $S' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

5. Sea V un espacio vectorial y W un subespacio vectorial de V . Encuentra una base de W y determina las ecuaciones cartesianas de un subespacio vectorial de V , W' , tal que $V = W \oplus W'$.

1. $V = \mathbb{R}^2$; $W = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 / v_1 - 2v_2 = 0\}$
2. $V = \mathbb{R}^3$; $W = \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 / v_1 + v_2 - v_3 = 0\}$
3. $V = \mathbb{R}^3$; $W = \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 / v_1 = 0, v_2 - v_3 = 0\}$
4. $V = \mathbb{M}_2$; $W = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2 / v_1 - v_4 = 0 \right\}$
5. $V = \mathbb{P}_2$; $W = \{v_1 + v_2x + v_3x^2 \in \mathbb{P}_2 / v_1 - v_2 - v_3 = 0, v_1 + 2v_3 = 0\}$

6. Sea $B_1 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ una base de un espacio vectorial V y sea $B_2 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ otra base de V tal que

$\vec{u}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{u}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$, $\vec{u}_3 = 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{u}_4 = \vec{e}_1 + \vec{e}_4$. Halla las coordenadas del vector $\vec{v} = \vec{e}_1 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4$ respecto de la base B_2

7. Consideremos los subconjuntos $U = \{M \in \mathbb{M}_2 / M \text{ es simétrica}\}$ y $W = \{M \in \mathbb{M}_2 / M \text{ es antisimétrica}\}$ del espacio vectorial $\mathbb{M}_2$.

1. ¿Son U y W subespacios vectoriales de $\mathbb{M}_2$?
2. Halla las ecuaciones, la dimensión y una base de U y W si procede.
3. Obtén las ecuaciones de $U \cap W$.
4. Calcula las ecuaciones de $U + W$.

8. Comprueba que $\mathbb{R}^3 = U + V$ y $\mathbb{R}^3 = U + W$ siendo $U = \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 / v_1 + v_2 + v_3 = 0\}$, $V = \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 / v_1 - v_3 = 0\}$ y $W = L\{(0, 0, 1)\}$. ¿En qué caso la suma es directa?

9. Si los vectores $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ de un espacio vectorial V son linealmente independientes, demuestra que también son linealmente independientes los vectores

$$\vec{u} = \vec{e}_1, \vec{v} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{w} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

10. Sean $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ elementos de un espacio vectorial V .

Si $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$ entonces $S = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ y $S' = \{\vec{v}, \vec{w}\}$ son sistemas equivalentes.